**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА**

**по курсу «ИНТЕГРАЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»**

**(ИОС «NOMOTEX»)**

**1 курс 2 семестр**

**для всех групп Э, АК и РКТ**

**МОДУЛЬ 1 «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»**

**Глава 1. Неопределенный интеграл**

**Параграф 1.1**. **Первообразная и неопределенный интеграл.**

Квант 1.1.1. Первообразная

Квант 1.1.2. Теорема об общем виде первообразных ***(с доказательством)***

Квант 1.1.3. Неопределенный интеграл

Квант 1.1.4. Достаточное условие интегрируемости функций

**Параграф 1.2.** **Свойства неопределенного интеграла.**

1. Свойства неопределенного интеграла
2. Правила интегрирования
3. Таблица интегралов
4. Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле ***(с доказательством)***
5. Теорема об интегрировании по частям ***(с доказательством)***

**Параграф 1.3.** **Интегрирование основных типов функций**

1. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен
2. Интегрирование рациональных дробей
3. Интегрирование тригонометрических функций
4. Интегрирование некоторых иррациональных функций
5. Эллиптические интегралы

**Параграф 1.4.** **Некоторые сведения о многочленах**

1. Многочлен
2. Разложение многочлена на множители
3. Равенство многочленов
4. Рациональная дробь
5. Выделение целой части дроби

**Глава 2. Определенный интеграл**

**Параграф 2.1.** **Основные определения**

1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла
2. Разбиение отрезка
3. Измельчение разбиения отрезка
4. Размеченное разбиение отрезка
5. Интегральная сумма
6. Предел интегральных сумм
7. Свойства предела интегральных сумм
8. Определенный интеграл
9. Необходимое условие интегрируемости

## Параграф 2.2. Суммы и интегралы Дарбу

1. Верхняя и нижняя суммы Дарбу
2. Свойство 1 сумм Дарбу
3. Свойство 2 сумм Дарбу
4. Свойство 3 сумм Дарбу
5. Свойство 4 сумм Дарбу
6. Свойство 5 сумм Дарбу
7. Интегралы Дарбу
8. Колебание функции на множестве
9. Свойство колебания функции
10. Теорема Дарбу
11. Критерий Дарбу интегрируемости функции

## Параграф 2.3. Классы интегрируемых функций

1. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции
2. Интегрируемость функции, имеющей на отрезке конечное число точек разрыва
3. Интегрируемость монотонной на отрезке функции
4. Интегрируемость сложной функции

## Параграф 2.4. Свойства интегрируемых функций и определенного интеграла

1. Интегрируемость модуля и квадрата интегрируемой функции
2. Интегрируемость суммы, разности и произведения интегрируемых функций
3. Нечувствительность интеграла к изменению значений интегрируемой функции в конечном числе точек
4. Свойство аддитивности
5. Свойство линейности
6. Свойство интеграла, выражающиеся неравенствами
7. Теорема об интегрировании неравенства
8. Теорема об оценке интеграла ***(с доказательством)***
9. Теорема об оценке модуля интеграла
10. Теорема о среднем значении
11. Теорема о среднем для непрерывной функции
12. Обобщенная теорема о среднем
13. Интегральное неравенство для системы функций

## Параграф 2.5. Интегралы с переменным верхним пределом

1. Определение интеграла с переменным верхним пределом
2. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом
3. Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом ***(с доказательством)***
4. Формула Ньютона-Лейбница ***(с доказательством)***

## Параграф 2.6. Вычисление определенных интегралов

1. Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле ***(с доказательством)***
2. Интегрирование по частям в определенном интеграле ***(с доказательством)***
3. Интеграл от четных функций по симметричному промежутку ***(с доказательством)***
4. Интеграл от нечетных функций по симметричному промежутку ***(с доказательством)***
5. Интеграл от периодических функций на отрезке, кратном периоду

**Глава 3. Несобственные интегралы**

## Параграф 3.1. Несобственный интеграл первого рода

1. Определение несобственного интеграла первого рода (по неограниченному промежутку) ***(доказательство сходимости интеграла в зависимости от параметра k)***
2. Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла первого рода
3. Необходимые и достаточные условия сходимости несобственного интеграла первого рода
4. Свойство 1 несобственного интеграла первого рода
5. Свойство 2 несобственного интеграла первого рода
6. Свойство 3 несобственного интеграла первого рода
7. Интегрирование по частям в несобственном интеграле первого рода
8. Замена переменной в несобственном интеграле первого рода
9. Критерий сходимости несобственного интеграла первого рода при знакопостоянной функции
10. Признак сходимости несобственных интегралов первого рода от знакопостоянных функций ***(с доказательством)***
11. Предельная форма признака сходимости несобственных интегралов первого рода ***(с доказательством)***
12. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла первого рода
13. Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов первого рода
14. Признак Абеля сходимости несобственных интегралов первого рода

## Параграф 3.2. Несобственный интеграл второго рода

1. Определение несобственного интеграла второго рода (от неограниченной функции) ***(доказательство сходимости интеграла в зависимости от параметра k)***
2. Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла второго рода
3. Некоторые свойства несобственного интеграла второго рода
4. Интегрирование по частям в несобственном интеграле второго рода
5. Замена переменной в несобственном интеграле второго рода
6. Критерий сходимости несобственного интеграла второго рода при знакопостоянной функции
7. Признак сходимости несобственных интегралов второго рода от знакопостоянных функций
8. Предельная форма признака сходимости несобственных интегралов второго рода
9. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла второго рода
10. Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов второго рода
11. Признак Абеля сходимости несобственных интегралов второго рода
12. Несобственный интеграл от функции, имеющей несколько особенностей на промежутке интегрирования

**Глава 4. Приложения определенного интеграла**

## Параграф 4.1. Длина кривой на плоскости

1. Кривые на плоскости в декартовых и полярных координатах Внутренняя точка множества
2. Кривые на плоскости, заданные параметрически
3. Спрямляемая кривая и длина кривой
4. Гладкая кривая
5. Длина гладкой кривой

## Параграф 4.2. Площадь плоской блочной фигуры

1. Блочная область
2. Блочная фигура на плоскости
3. Площадь блочной фигуры
4. Площадь области, ограниченной кривыми, заданными параметрически
5. Площадь блочной области, заданной в полярных координатах

**МОДУЛЬ 2 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»**

**Глава 5. Дифференциальные уравнения 1-го порядка**

## Параграф 5.1. ****Общие сведения о ДУ. ОДУ 1 порядка****

## Определение обыкновенного дифференциального уравнения и его порядка

## Дифференциальное уравнение 1-го порядка

## Решение дифференциального уравнения 1-го порядка

## Постановка задачи Коши дифференциального уравнения 1-го порядка

## Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ первого порядка

## Общее решение ДУ 1-го порядка

## Частное решение ДУ 1-го порядка

## Уравнение с разделенными переменными

## Уравнение с разделяющимися переменными

## Однородное уравнение 1-го порядка

## Линейные уравнения первого порядка

## Уравнение Бернулли

## Уравнение в полных дифференциалах

## Геометрический смысл уравнения первого порядка. Изоклины.

## Особые точки и особые решения уравнения первого порядка

**Глава 6. Дифференциальные уравнения высших порядков**

**Параграф 6.1. ДУ n-го порядка. Уравнения, допускающие понижение порядка**

1. Определение обыкновенного дифференциального уравнения и его порядка
2. Решение дифференциального уравнения
3. Постановка задачи Коши дифференциального уравнения n-го порядка
4. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ n-го порядка
5. Общее решение ДУ n-го порядка
6. Частное решение ДУ n-го порядка
7. Уравнение, допускающее понижение порядка
8. Уравнение, не содержащее в явном виде искомую функцию и её младшие производные
9. Уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную

**Глава 7. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков**

**Параграф 7.1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Общие сведения**

* 1. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка
  2. Теорема Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка
  3. Линейный дифференциальный оператор
  4. Свойство 1 линейного дифференциального оператора
  5. Свойство 2 линейного дифференциального оператора
  6. Теорема 1 о свойствах решений линейного однородного дифференциального уравнения
  7. Теорема 2 о свойствах решений линейного однородного дифференциального уравнения
  8. Теорема 3 о свойствах решений линейного однородного дифференциального уравнения

**Параграф 7.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков**

1. Линейно зависимые функции
2. Линейно независимые функции
3. Определитель Вронского
4. Теорема о Вронскиане для линейно зависимых функций ***(с доказательством)***
5. Теорема о линейно независимых решениях линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка ***(с доказательством)***
6. Теорема о Вронскиане для линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения ***(с доказательством)***
7. Теорема о линейной зависимости (n+1) решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка ***(с доказательством)***
8. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения
9. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка ***(с доказательством)***
10. Теорема о понижении порядка линейного однородного дифференциального уравнения при известном частном решении
11. Формула Остроградского-Лиувилля ***(с доказательством)***

**Параграф 7.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков**

1. Теорема о свойстве решения линейного неоднородного дифференциального уравнения
2. Теорема о наложении частных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения (принцип суперпозиции) ***(с доказательством)***
3. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка ***(с доказательством)***
4. Метод Лагранжа для НЛДУ n-го порядка (метод вариации произвольных постоянных)

**Параграф 7.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами**

1. Характеристическое уравнение
2. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами ***(с доказательством)***
3. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами
4. Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами
5. Метод подбора частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

**Глава 8. Системы дифференциальных уравнений**

**Параграф 8.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений**

1. Нормальная система дифференциальных уравнений
2. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений
3. Постановка задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений
4. Условие Липшица для векторной функции
5. Теорема Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений
6. Общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений
7. Частное решение нормальной системы дифференциальных уравнений
8. Сведение дифференциального уравнения n-го порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений
9. Сведение нормальной системы дифференциальных уравнений к дифференциальному уравнению n-го порядка (случай n=2)
10. Сведение нормальной системы дифференциальных уравнений к дифференциальному уравнению n-го порядка (общий случай)
11. Первый интеграл нормальной системы дифференциальных уравнений n-го порядка

**Глава 9. Системы линейных дифференциальных уравнений**

**Параграф 9.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений (общие сведения)**

1. Система линейных дифференциальных уравнений n-го порядка
2. Теорема Коши для системы линейных дифференциальных уравнений и теорема существования и единственности ее решения
3. Линейный дифференциальный оператор
4. Теорема 1 о свойствах решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений
5. Теорема 2 о свойствах решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений

**Параграф 9.2. Нормальные системы однородных дифференциальных уравнений**

1. Линейно зависимые вектор-функции
2. Определитель Вронского для системы вектор-функций
3. Теорема о Вронскиане для линейно независимых решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений
4. Теорема о Вронскиане линейно зависимой системы функций
5. Теорема о линейно независимых решениях системы линейных однородных дифференциальных уравнений
6. Теорема о линейной зависимости (n+1) решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений
7. Фундаментальная система решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений
8. Теорема о структуре общего решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений
9. Формула Остроградского-Лиувилля

**Параграф 9.3. Нормальные системы неоднородных дифференциальных уравнений**

1. Теорема о свойстве решений системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений
2. Теорема о структуре общего решения решений системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений
3. Теорема о наложении частных решений системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений (принцип суперпозиции)
4. Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных)

**Параграф 9.4. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами**

1. Характеристическое уравнение системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
2. Фундаментальная система решений в случае различных действительных корней характеристического уравнения

**Темы практических заданий**

1. Вычисление дуги кривой;
2. Вычисление площади фигуры в полярных координатах;
3. Вычисление объема тела вращения;
4. Вычисление площади поверхности тела вращения;
5. Исследование сходимости несобственного интеграла первого рода;
6. Исследование сходимости несобственного интеграла второго рода;
7. Дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка;
8. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения;
9. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа (вариаций произвольных постоянных);
10. Нормальная неоднородная система дифференциальных уравнений.